BTS Électrotechnique – Mathématiques
Session 2024 – Groupement B

- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)
- **Code sujet :** 24MATGRB3

EXERCICE 1 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie l'évolution de la résistance du béton en fonction du temps de séchage, modélisée par une équation différentielle et une fonction exponentielle. On demande de résoudre cette équation, d'analyser la fonction obtenue, de calculer des valeurs numériques, et de compléter un algorithme pour déterminer le nombre de jours nécessaires pour atteindre une certaine résistance.

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. Résolution de l'équation différentielle homogène (E_0)

On considère l'équation différentielle homogène : y′ + 0,06y = 0

On fournit la formule :
Pour y′ + a y = 0, les solutions sont y(t) = k e^{-a t}.

Ici, a = 0,06, donc toutes les solutions sont :

y(t) = k e^{-0,06 t}, avec k ∈ ℝ

Point de méthode : On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, homogène.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans l'exposant ou oublier la constante d'intégration.

2. Vérification que g(t) = 35 est solution de (E)

On pose g(t) = 35 (constante). Calculons g'(t) :

- g'(t) = 0
- g'(t) + 0,06 g(t) = 0 + 0,06 × 35 = 2,1

Donc g est bien solution de l'équation y′ + 0,06y = 2,1.

g(t) = 35 est solution de (E).

Point de méthode : Pour vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle, il suffit de remplacer dans l'équation.
Erreur fréquente : Oublier de calculer la dérivée ou mal appliquer la constante.

3. Ensemble des solutions de (E)

Les solutions de l'équation y′ + 0,06y = 2,1 sont de la forme :

- Solution générale = Solution particulière + Solution générale de l'homogène.

Donc : $y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$, avec $k \in \mathbb{R}$

$y(t) = k e^{-0,06 t} + 35, k \in \mathbb{R}$

Point de méthode : Toute solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre = solution particulière + solution de l'homogène.
Erreur fréquente : Oublier la constante k ou la solution particulière.

4. Détermination de la fonction f(t) avec la condition initiale

On sait que $f(0) = 0$ (résistance nulle au début).
On a $f(t) = k e^{-0,06 t} + 35$.

- À $t = 0$: $f(0) = k \times 1 + 35 = 0$ donc $k = -35$

Donc :

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante.
Erreur fréquente : Mal appliquer la condition initiale, ou oublier le signe.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Calcul de la résistance après 7 jours et après 72 heures

On a $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$.

- Après 7 jours : $t = 7$
- Après 72 heures = 3 jours : $t = 3$

Calculs :

- $f(7) = -35 e^{-0,06 \times 7} + 35$
- $0,06 \times 7 = 0,42$
- $e^{-0,42} \approx 0,658$
- $f(7) \approx -35 \times 0,658 + 35 \approx -23,03 + 35 \approx 11,97$
- Arrondi au dixième : **12,0 MPa**
- $f(3) = -35 e^{-0,06 \times 3} + 35$
- $0,06 \times 3 = 0,18$
- $e^{-0,18} \approx 0,836$
- $f(3) \approx -35 \times 0,836 + 35 \approx -29,26 + 35 \approx 5,74$
- Arrondi au dixième : **5,7 MPa**

Après 7 jours : **12,0 MPa**
Après 72 heures (3 jours) : **5,7 MPa**

Point de méthode : Remplacer t dans l'expression, attention à bien arrondir.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les heures en jours, erreur d'arrondi.

2. Vérification de la dérivée

On a $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$.

- La dérivée de $-35 e^{-0,06 t}$ est $-35 \times (-0,06) e^{-0,06 t} = 2,1 e^{-0,06 t}$
- La dérivée de 35 est 0

Donc :

$f'(t) = 2,1 e^{-0,06 t}$

Point de méthode : Dérivation de l'exponentielle : $\frac{d}{dt} e^{a t} = a e^{a t}$.
Erreur fréquente : Oublier le signe ou le facteur devant l'exponentielle.

3. Signe de f′(t) et variations de f

Pour tout $t \geq 0$:

- $e^{-0,06 t} > 0$
- $2,1 > 0$

Donc $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

$f'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$ ⇒ **f est strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Le signe d'une exponentielle réelle négative est toujours positif.
Erreur fréquente : Prendre le signe de la dérivée sans vérifier le signe de l'exponentielle.

4. Limite de f(t) lorsque t → +∞ et interprétation

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

- Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,06 t} \to 0$
- Donc $f(t) \to 35$

Interprétation : La résistance du béton tend vers **35 MPa** au bout d'un temps très long, c'est la résistance finale maximale.

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$

Point de méthode : Limite d'une exponentielle négative : $e^{-a t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.
Erreur fréquente : Oublier le terme constant ou inverser le signe.

5. Vérification de l'affirmation du fabricant (28 jours = 80% de la résistance finale ?)

Calculons $f(28)$:

- $0,06 \times 28 = 1,68$
- $e^{-1,68} \approx 0,186$
- $f(28) = -35 \times 0,186 + 35 \approx -6,51 + 35 \approx 28,49$

80% de la résistance finale : $0,8 \times 35 = 28$

$f(28) \approx 28,5$ MPa, soit **environ 81,4%** de la résistance finale.

L'affirmation du fabricant est **légèrement sous-estimée** : après 28 jours, la résistance atteint environ 81,4% de la résistance finale.

Point de méthode : Calculer la valeur exacte puis le pourcentage atteint.
Erreur fréquente : Oublier de comparer à la résistance finale.

6. Montrer que F(t) est une primitive de f(t)

On pose $F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$

- La dérivée de $\frac{1750}{3} e^{-0,06 t}$ est $\frac{1750}{3} \times (-0,06) e^{-0,06 t} = -35 e^{-0,06 t}$
- La dérivée de $35 t$ est 35

Donc $F'(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 = f(t)$

F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dériver chaque terme séparément, attention au signe.
Erreur fréquente : Oublier la règle de dérivation de l'exponentielle.

7. Valeur moyenne de la résistance sur 28 jours

Formule : $M = \frac{1}{28} \int_{0}^{28} f(t) dt = \frac{F(28) - F(0)}{28}$

- $F(28) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28$
- $e^{-1,68} \approx 0,186$
- $\frac{1750}{3} \times 0,186 \approx 108,33$
- $35 \times 28 = 980$
- $F(28) \approx 108,33 + 980 = 1088,33$
- $F(0) = \frac{1750}{3} \times 1 + 0 = 583,33$
- $F(28) - F(0) \approx 1088,33 - 583,33 = 505$
- $M \approx 505 / 28 \approx 18,0$ (arrondi au dixième)

La valeur moyenne de la résistance sur 28 jours est **18,0 MPa**.

Point de méthode : Utiliser la primitive pour calculer une intégrale définie.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire F(0), erreur d'arrondi.

Partie C – Algorithme

1. Compléter l'algorithme

L'algorithme doit augmenter t jusqu'à ce que $R \geq 21$.

- Ligne 3 : Tant que $R < 21$
- Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Ligne 3 : Tant que $R < 21$
Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Point de méthode : Utiliser la structure de boucle « Tant que » pour tester la condition.
Erreur fréquente : Oublier d'incrémenter t ou mal écrire la condition.

2. Valeur de N et démarche

On cherche le plus petit t entier tel que $f(t) \geq 21$.

- $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 \geq 21$
- $-35 e^{-0,06 t} \geq -14$
- $e^{-0,06 t} \leq 14/35 = 0,4$
- On prend le logarithme :
- $-0,06 t \leq \ln(0,4)$
- $t \geq -\ln(0,4)/0,06$
- $\ln(0,4) \approx -0,9163$
- $t \geq -(-0,9163)/0,06 \approx 15,27$
- Donc N = 16 (on prend le plus petit entier supérieur)

Le nombre minimal de jours est **16**.

Point de méthode : Résoudre une inéquation exponentielle, puis arrondir à l'entier supérieur.
Erreur fréquente : Arrondir à l'entier inférieur ou mal manipuler les logarithmes.

EXERCICE 2 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie un signal électrique périodique modélisé par une fonction en créneau, et on demande de calculer sa pulsation, de représenter sa courbe, de déterminer ses coefficients de Fourier, sa valeur moyenne, sa valeur efficace, et d'interpréter une approximation.

1. Calcul de la pulsation ω

On rappelle : $\omega = 2\pi / T$ avec $T = 20$.

- $\omega = 2\pi / 20 = \pi / 10$

$\omega = \pi / 10$

Point de méthode : Formule de la pulsation d'un signal périodique.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par la période ou inverser le numérateur et le dénominateur.

2. Représentation graphique de E(t)

La fonction E(t) est un créneau de période 20, valant 12 sur [0;10[et 0 sur [10;20[. On doit représenter ce motif pour $t \in [-30 ; 30]$.
À chaque période de 20, le motif se répète.

- Sur [0,10[: E = 12
- Sur [10,20[: E = 0
- Idem pour [-20, -10[: E = 12, [-10, 0[: E = 0, etc.

Échelle : 2 cm pour 10 unités en abscisse, 1 cm pour 2 unités en ordonnée.
On trace des rectangles de hauteur 12 (6 cm) sur chaque intervalle [kT, kT+10[.

Représentation graphique : alternance de segments horizontaux à 12 et 0, de largeur 10, sur l'intervalle [-30 ; 30].

Point de méthode : Représenter correctement la discontinuité, respecter les échelles.
Erreur fréquente : Oublier de répéter le motif ou mal placer les transitions.

3. Valeur moyenne a_0 de E

Formule : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} E(t) dt$

- Sur [0,10[: $E(t) = 12$
- Sur [10,20[: $E(t) = 0$

Donc : $a_0 = \frac{1}{20} \left(\int_{0}^{10} 12 dt + \int_{10}^{20} 0 dt \right) = \frac{1}{20} (12 \times 10 + 0) = \frac{120}{20} = 6$

$a_0 = 6$

Point de méthode : Calculer la moyenne d'une fonction en utilisant les intégrales sur chaque intervalle.
Erreur fréquente : Oublier de prendre en compte la partie nulle.

4. Valeur efficace E_{eff}

Formule : $(E_{eff})^2 = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} (E(t))^2 dt$

- Sur [0,10[: $(E(t))^2 = 144$
- Sur [10,20[: $(E(t))^2 = 0$

Donc : $(E_{eff})^2 = \frac{1}{20} (144 \times 10 + 0) = \frac{1440}{20} = 72$

Donc $E_{eff} = \sqrt{72} = 6 \sqrt{2}$

$E_{eff} = 6 \sqrt{2}$

Point de méthode : Calculer la valeur efficace en élevant au carré, puis en prenant la racine.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la racine carrée à la fin.

5. Calcul des coefficients a_n pour $n \geq 1$

Formule : $a_n = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} E(t) \cos(n \omega t) dt$

Sur [0,10[: $E(t) = 12$, sur [10,20[: $E(t) = 0$

Donc : $a_n = \frac{2}{20} \int_{0}^{10} 12 \cos(n \omega t) dt = \frac{12}{10} \int_{0}^{10} \cos(n \omega t) dt$

Calculons l'intégrale :

- Primitve de $\cos(n \omega t)$ est $\frac{1}{n \omega} \sin(n \omega t)$
- Donc $\int_{0}^{10} \cos(n \omega t) dt = \frac{1}{n \omega} [\sin(n \omega t)]_{0}^{10} = \frac{1}{n \omega} (\sin(n \omega \times 10) - \sin(0))$
- $\omega = \pi / 10$ donc $n \omega \times 10 = n \pi$
- $\sin(n \pi) = 0$ pour tout n entier

Donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$

Point de méthode : Utiliser la propriété des sinus de multiples de π.
Erreur fréquente : Oublier que $\sin(n \pi) = 0$.

6. Montrer que $b_n = 0$ pour n pair

On admet $b_n = \frac{12}{n \pi} (1 - \cos(n \pi))$.

- Pour n pair, $n = 2k$
- $\cos(2k \pi) = 1$
- $1 - \cos(n \pi) = 1 - 1 = 0$

Donc $b_n = 0$ pour n pair.

Pour n pair, $b_n = 0$

Point de méthode : Utiliser les propriétés des cosinus de multiples de π.
Erreur fréquente : Oublier que $\cos(2k \pi) = 1$.

7. Compléter le tableau des b_n (arrondi à 0,01)

Pour n impair : $b_n = \frac{12}{n \pi} (1 - \cos(n \pi))$.
Pour n impair, $\cos(n \pi) = -1$, donc $1 - (-1) = 2$.
Donc $b_n = \frac{24}{n \pi}$ pour n impair.
Pour n pair : $b_n = 0$.

- $n = 1 : b_1 = 24 / (1 \times \pi) \approx 7{,}64$
- $n = 2 : b_2 = 0$
- $n = 3 : b_3 = 24 / (3 \times \pi) \approx 2{,}55$
- $n = 4 : b_4 = 0$
- $n = 5 : b_5 = 24 / (5 \times \pi) \approx 1{,}53$
- $n = 6 : b_6 = 0$
- $n = 7 : b_7 = 24 / (7 \times \pi) \approx 1{,}09$

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

Point de méthode : Calculer séparément les cas n pair et n impair.
Erreur fréquente : Arrondir trop tôt ou oublier de multiplier par 2 pour n impair.

8. Approximation de E_{eff} par E_7

On rappelle : $(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{7} (a_k^2 + b_k^2)$

- On a vu que tous les $a_k = 0$
- Seuls les b_k impairs sont non nuls

Calculons :

- $a_0 = 6$
- $b_1 = 7{,}64$
- $b_3 = 2{,}55$
- $b_5 = 1{,}53$
- $b_7 = 1{,}09$

Somme des carrés :

- $b_1^2 = 58{,}37$
- $b_3^2 = 6{,}50$
- $b_5^2 = 2{,}34$
- $b_7^2 = 1{,}19$

Total = $58{,}37 + 6{,}50 + 2{,}34 + 1{,}19 = 68{,}40$

Donc : $(E_7)^2 = 36 + \frac{1}{2} \times 68{,}40 = 36 + 34{,}20 = 70{,}20$

$E_7 = \sqrt{70{,}20} \approx 8{,}39$

On compare à $E_{eff} = 6 \sqrt{2} \approx 8{,}49$

Erreur relative : $\frac{8{,}49 - 8{,}39}{8{,}49} \approx 0{,}012$ soit 1,2%

L'approximation par E_7 donne une erreur inférieure à 5%. L'affirmation est donc **juste**.

Point de méthode : Calculer la somme des carrés, puis la racine, puis l'écart relatif.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la racine carrée ou de diviser la somme par 2.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \Rightarrow y(t) = k e^{-a t}$
- Équation différentielle non homogène : solution = particulière + homogène
- Valeur moyenne sur $[a, b]$: $M = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} h(t)\, dt$
- Primitive de $e^{a t}$: $\frac{1}{a} e^{a t}$
- Pulsation : $\omega = 2\pi / T$
- Développement de Fourier :
  - $a_0 = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(t)\, dt$
  - $a_n = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} f(t) \cos(n \omega t)\, dt$
  - $b_n = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} f(t) \sin(n \omega t)\, dt$
- Valeur efficace : $f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} (f(t))^2\, dt}$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement chaque question** pour bien comprendre ce qui est demandé avant de commencer à rédiger.
- **Soignez les calculs et les justifications** : détaillez chaque étape, même si elle vous semble évidente.
- **Vérifiez la cohérence des unités** et des conversions (jours, heures, MPa, etc.).

- **En cas de blocage sur une question, passez à la suivante** : les parties sont souvent indépendantes.
- **Relisez-vous** : vérifiez vos résultats, vos arrondis, et que vous avez bien répondu à toutes les questions.