BTS Mathématiques – Session 2025 – Groupement B

Durée : 2 heures
Calculatrice : Autorisée (mode examen actif ou type collège sans mémoire)

EXERCICE 1 (10 points)

Résumé de l’énoncé

On étudie le refroidissement d’une plaque d’aluminium sortie du four à 250°C. La température à l’instant t (en minutes) est modélisée par une fonction f(t) solution d’une équation différentielle, puis explicitement par $f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$. On analyse la résolution de l’équation différentielle, puis les propriétés de la fonction f.

Partie A. Équation différentielle

1. Résoudre l’équation différentielle homogène $y' + 0,25y = 0$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

D’après la formule fournie :

> *Équation : $y' + ay = 0 \;\Rightarrow\; y(t) = k\,e^{-a\,t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

Ici, a = 0,25, donc :

$y(t) = k\,e^{-0,25\,t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$y(t) = k\,e^{-0,25\,t}$, $k \in \mathbb{R}$

Point de méthode : On résout une équation différentielle homogène du premier ordre en utilisant la formule générale.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins à l’exposant ou confondre le coefficient a.

---

2. Déterminer le réel c pour que la fonction constante $g(t) = c$ soit solution de $y' + 0,25y = 7,5$

Si $g(t) = c$ alors $g'(t) = 0$. On remplace dans l’équation :

$0 + 0,25c = 7,5$ soit $0,25c = 7,5$

On résout :

$c = 7,5 \div 0,25 = 30$

$c = 30$

Point de méthode : Pour une solution constante, la dérivée est nulle.
Erreur fréquente : Oublier de vérifier que la constante doit vérifier l’équation non homogène.

---

3. Donner l’ensemble des solutions de l’équation différentielle complète $y' + 0,25y = 7,5$

La solution générale d’une équation différentielle linéaire non homogène est :

y(t) = S_p(t) + S_h(t)

- **S_p(t)** : une solution particulière (ici, la constante c trouvée précédemment : 30)
- **S_h(t)** : la solution générale de l'équation homogène ($k\ e^{-0,25\ t}$)

Donc :

$y(t) = k\ e^{-0,25\ t} + 30 \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$

$y(t) = k\ e^{-0,25\ t} + 30,\ k \in \mathbb{R}$

Point de méthode : On additionne la solution générale de l'homogène et une solution particulière.
Erreur fréquente : Oublier le terme particulier (ici, la constante 30).

---

4. Déterminer l'expression de f sachant que $f(0) = 250$

On a $f(t) = k\ e^{-0,25\ t} + 30$ et $f(0) = 250$.

Calculons k :

$f(0) = k \times 1 + 30 = 250 \quad \text{donc} \quad k = 250 - 30 = 220$

Donc :

$f(t) = 220\ e^{-0,25\ t} + 30$

$f(t) = 220\ e^{-0,25\ t} + 30$

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante k.
Erreur fréquente : Oublier d'appliquer la condition initiale ou mal calculer k.

Partie B. Étude de la fonction $f(t) = 220\ e^{-0,25\ t} + 30$

1. Calculer la température après un quart d'heure (15 minutes)

On cherche f(15).

$f(15) = 220\ e^{-0,25 \times 15} + 30 = 220\ e^{-3,75} + 30$

Calculons $e^{-3,75}$:

- $e^{-3,75} \approx 0,0235$
- Donc $220 \times 0,0235 \approx 5,17$
- Finalement $f(15) \approx 5,17 + 30 \approx 35,2$ (arrondi à 0,1°C)

Après 15 minutes, la température est **environ 35,2°C**.

Point de méthode : Bien respecter l'ordre des opérations et arrondir à la précision demandée.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter le 30 ou mal calculer l'exponentielle.

---

2. Limite de f en $+\infty$, conséquence sur la courbe et interprétation

$f(t) = 220\ e^{-0,25\ t} + 30$

- Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,25\ t} \to 0$

- Donc $f(t) \to 30$

Conséquence sur la courbe : **la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 30$**.

Interprétation : **La température de la plaque tend vers 30°C, qui est la température ambiante**.

\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30 : la température se stabilise à 30°C.

Point de méthode : Reconnaître la forme limite d'une exponentielle décroissante.
Erreur fréquente : Croire que la température descend sous 30°C ou s'annule.

---

3. Dérivée de f et variations

On dérive :

$f(t) = 220\, e^{-0,25\, t} + 30$

$f'(t) = 220 \times (-0,25)\, e^{-0,25\, t} = -55\, e^{-0,25\, t}$

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,25\, t} > 0$, donc $f'(t) < 0$.

Donc **f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[**.

Interprétation : **La température de la plaque diminue continuellement au cours du temps**.

$f'(t) = -55\, e^{-0,25\, t}$
f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[

Point de méthode : Dériver une fonction exponentielle et analyser le signe.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou mal dériver l'exponentielle.

---

4. Vérification de l'affirmation du technicien et durée pour passer sous 150°C

Affirmation : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés »

- 100 secondes = 1 min 40 s = 1,666... min
- Calculons f(1,666...) :
- $f(1,666) = 220\, e^{-0,25 \times 1,666} + 30 = 220\, e^{-0,4165} + 30$
- $e^{-0,4165} \approx 0,659$
- $220 \times 0,659 \approx 145$
- $f(1,666) \approx 145 + 30 = 175$°C
- Perte : 250 – 175 = 75°C

Le technicien a tort : la perte n'est que de 75°C en 100 secondes.

Durée pour passer sous 150°C :

On cherche t tel que $f(t) < 150$ soit $220\, e^{-0,25\, t} + 30 < 150$

$220\, e^{-0,25\, t} < 120$
$e^{-0,25\, t} < 120 / 220 = 0,545$

On prend le logarithme népérien :

–0,25 t < \ln(0,545)
$-0,25\, t < -0,607$
$t > 0,607 / 0,25 = 2,428$ minutes

En secondes : $2{,}428 \times 60 \approx 146$ secondes

Le technicien a tort : il faut environ **146 secondes** (soit 2 min 26 s) pour passer sous 150°C.

Point de méthode : Traduire correctement l'inégalité, utiliser le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les minutes en secondes ou mal manipuler les logarithmes.

---

5. Croquis de la courbe de f

Le croquis doit montrer :

- Point initial (0 ; 250)
- Asymptote horizontale $y = 30$
- Point (15 ; 35,2)
- Passage sous 150°C vers $t = 2{,}43$ min
- Courbe strictement décroissante

(À réaliser à la main sur la copie, en respectant ces indications)

Point de méthode : Repérer les points clés et l'asymptote pour tracer une courbe qualitative.
Erreur fréquente : Dessiner une courbe qui coupe l'asymptote ou qui n'est pas strictement décroissante.

EXERCICE 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On modélise le temps d'attente d'un client par une loi exponentielle, puis on étudie les probabilités liées aux consommations dans un café (probabilités conditionnelles et indépendance), et enfin on construit un intervalle de confiance pour la proportion d'étudiants parmi les clients.

Partie A. Loi exponentielle

1. Justifier que \lambda = 0,25

Pour une loi exponentielle de paramètre \lambda, l'espérance est 1/\lambda.

On donne : temps moyen = 4 minutes, donc 1/\lambda = 4 ⇒ \lambda = 1/4 = 0,25

\lambda = 0,25

Point de méthode : Bien connaître la formule de l'espérance pour la loi exponentielle.
Erreur fréquente : Inverser λ et l'espérance.

---

2. Probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 3 minutes

L'événement $(T < 3)$: « Le client est servi en moins de 3 minutes ».

Pour une loi exponentielle : P(T < t) = 1 – e^{–\lambda t}

Ici : \lambda = 0,25, t = 3

$P(T < 3) = 1 - e^{-0,25 \times 3} = 1 - e^{-0,75}$

- $e^{-0,75} \approx 0,472$
- $P(T < 3) \approx 1 - 0,472 = 0,528$

Arrondi à 10^{-3} : **0,528**

$P(T < 3) \approx 0,528$

Point de méthode : Utiliser la bonne formule de la loi exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier le « 1 – » ou mal calculer l'exponentielle.

---

3. Probabilité d'attendre au moins 5 minutes

On cherche $P(T \geq 5) = P(T > 5) = e^{-\text{\textbackslash lambda} \times 5}$

$e^{-0,25 \times 5} = e^{-1,25} \approx 0,287$

$P(T \geq 5) \approx 0,287$

Point de méthode : Pour « au moins », utiliser la fonction de survie de la loi exponentielle.
Erreur fréquente : Confondre $P(T < 5)$ et $P(T > 5)$.

---

4. Temps t tel que $P(T > t) = 0,1$

On a $P(T > t) = e^{-0,25\ t} = 0,1$

On prend le logarithme :

–0,25 t = \ln(0,1) = –2,302

$t = 2,302 / 0,25 = 9,208$ minutes

En secondes : $9,208 \times 60 \approx 553$ secondes

Il faut environ **553 secondes** (soit 9 min 13 s) pour que la probabilité d'attendre plus soit 0,1.

Point de méthode : Savoir manipuler le logarithme népérien.
Erreur fréquente : Mal gérer le signe ou oublier de convertir en secondes.

Partie B. Probabilités conditionnelles

1. Arbre pondéré de la situation

On a :

- 60 % des consommations en terrasse (T), dont 1/3 de boissons chaudes (C), donc 2/3 froides (F)
- 40 % en salle (S), dont 3/4 chaudes (C), donc 1/4 froides (F)

Arbre :

- 1er niveau : Terrasse (0,6) / Salle (0,4)
- 2^{e} niveau : Chaude (0,33) / Froide (0,67) après Terrasse ; Chaude (0,75) / Froide (0,25) après Salle

Pondérations :

- $T \to C$: $0{,}6 \times 1/3 = 0{,}2$
- $T \to F$: $0{,}6 \times 2/3 = 0{,}4$
- $S \to C$: $0{,}4 \times 3/4 = 0{,}3$
- $S \to F$: $0{,}4 \times 1/4 = 0{,}1$

Arbre pondéré :

- Terrasse (0,6)
  - Chaude (0,2)
  - Froide (0,4)
- Salle (0,4)
  - Chaude (0,3)
  - Froide (0,1)

Point de méthode : Multiplier les probabilités conditionnelles.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier ou mal convertir les fractions.

---

2. Probabilité $P(T \cap C)$

C'est la probabilité « terrasse et boisson chaude ».

$P(T \cap C) = P(T) \times P(C \mid T) = 0{,}6 \times 1/3 = 0{,}2$

$P(T \cap C) = 0{,}2$

Point de méthode : Utiliser la formule du produit.
Erreur fréquente : Prendre la mauvaise branche de l'arbre.

---

3. Montrer que la probabilité d'une boisson chaude est 1/2

$P(C) = P(T \cap C) + P(S \cap C) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5 = 1/2$

$P(C) = 0{,}5 = 1/2$

Point de méthode : Additionner toutes les issues menant à C.
Erreur fréquente : Oublier une branche.

---

4. Probabilité conditionnelle : la boisson chaude est-elle plus souvent servie en salle ?

On cherche $P(S \mid C)$ et $P(T \mid C)$.

- $P(T \mid C) = P(T \cap C) / P(C) = 0{,}2 / 0{,}5 = 0{,}4$
- $P(S \mid C) = P(S \cap C) / P(C) = 0{,}3 / 0{,}5 = 0{,}6$

Donc, **la boisson chaude a plus de chances d'être servie en salle (60 %) qu'en terrasse (40 %)**. Le serveur a raison.

Oui, le serveur a raison : la boisson chaude a 60 % de chances d'être servie en salle.

Point de méthode : Calculer la probabilité conditionnelle avec la formule : $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$.
Erreur fréquente : Inverser les conditions.

---

5. Indépendance de T et C

Deux événements sont indépendants si $P(T \cap C) = P(T) \times P(C)$.

- $P(T \cap C) = 0{,}2$
- $P(T) = 0{,}6$
- $P(C) = 0{,}5$
- $P(T) \times P(C) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3 \neq 0{,}2$

Donc, **T et C ne sont pas indépendants**.

Non, T et C ne sont pas indépendants car $P(T \cap C) \neq P(T) \times P(C)$.

Point de méthode : Tester l'égalité des probabilités.
Erreur fréquente : Oublier de comparer les deux valeurs.

Partie C. Intervalle de confiance

1. Estimation ponctuelle de la proportion d'étudiants

$f = 525 / 1000 = 0{,}525$

Estimation ponctuelle : **0,525**

Point de méthode : Proportion observée = nombre de cas favorables / effectif total.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par 1000.

---

2. Intervalle de confiance à 90 %

Formule :

> *$[f - 1{,}65 \sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}65 \sqrt{(f(1-f)/n)}]$*

Ici : $f = 0{,}525$, $n = 1000$

$f(1-f) = 0{,}525 \times 0{,}475 = 0{,}249$

$\sqrt{(0{,}249/1000)} = \sqrt{0{,}000249} \approx 0{,}0158$

$1{,}65 \times 0{,}0158 \approx 0{,}0261$

Intervalle : $[0{,}525 - 0{,}0261 ; 0{,}525 + 0{,}0261] = [0{,}4989 ; 0{,}5511]$

Intervalle de confiance à 90 % : **[0,499 ; 0,551]** (arrondi à 3 décimales)

Point de méthode : Appliquer la formule fournie et arrondir à 3 décimales.
Erreur fréquente : Mal calculer la racine carrée ou oublier de multiplier par 1,65.

---

3. Le patron a-t-il raison : « La proportion p est obligatoirement dans l'intervalle » ?

Non, l'intervalle de confiance ne contient la vraie proportion p qu'avec une probabilité de 90 %. Il est possible (mais peu probable) que p soit en dehors.

Non, il n'a pas raison : l'intervalle de confiance contient p avec une probabilité de 90 %, pas 100 %.

Point de méthode : Comprendre la notion de confiance statistique.
Erreur fréquente : Croire que l'intervalle est une certitude.

---

4. Manque à gagner mensuel pour une réduction de 10 %

Nombre d'étudiants par mois : $p \times 5000$ avec $p \in [0{,}499 ; 0{,}551]$

Consommation moyenne : 3,50 €
Réduction : 10 % ⇒ manque à gagner par étudiant : $0{,}10 \times 3{,}50 = 0{,}35$ €

Manque à gagner mensuel : $0{,}35 \times p \times 5000$

Pour $p = 0{,}499$: $0{,}35 \times 0{,}499 \times 5000 \approx 873$ €
Pour $p = 0{,}551$: $0{,}35 \times 0{,}551 \times 5000 \approx 964$ €

Le manque à gagner mensuel est compris entre **873 € et 964 €**.

Point de méthode : Calculer une borne inférieure et une borne supérieure.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier par le nombre de clients ou la réduction.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0$: $y(t) = k e^{-a t}$
- Solution générale d'une EDO non homogène : $y(t) = S\_p(t) + S\_h(t)$
- Loi exponentielle : $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, $E(T) = 1/\lambda$
- Probabilité conditionnelle : $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$
- Indépendance : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- Intervalle de confiance à 90 % : $[f - 1{,}65 \sqrt{f(1-f)/n} ; f + 1{,}65 \sqrt{f(1-f)/n}]$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les questions, et les unités.
- **Soignez la rédaction** : justifiez chaque étape et encadrez vos résultats.
- **Vérifiez la cohérence de vos résultats** : une température négative ou une probabilité supérieure à 1 sont des alertes d'erreur.
- **Maîtrisez votre calculatrice** : sachez utiliser les fonctions exponentielles, logarithmes, et statistiques.
- **Gérez votre temps** : ne vous attardez pas trop sur une question difficile, avancez et revenez-y plus tard si besoin.