Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Train à propulsion électromagnétique et aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2018/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Train à propulsion électromagnétique et aire d'une pièce de gare

Un projet de train à très haute vitesse vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes ; la distance parcourue par le wagon est étudiée à l'aide d'une équation différentielle et de l'analyse de ses variations. L'exercice se termine par le calcul de l'aire d'une pièce symétrique conçue pour une future gare, à partir d'une fonction et d'une primitive fournies.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0 en utilisant, si besoin, la formule fournie.

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = -0{,}2$. La formule donnée fournit alors $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par $-0{,}2$, l'exposant devient positif. Cette expression décrit toutes les solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0{,}2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$.
2. Dans le membre de gauche, on remplace g et g' par leurs expressions : $g'(t) - 0{,}2g(t) = -15 - 0{,}2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$.

On retrouve le membre de droite de l'équation différentielle. Ainsi, g est bien une solution sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0{,}2g(t) = 3t$: g est une solution.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La différence entre deux solutions de l'équation avec second membre est solution de l'équation homogène associée. Les solutions homogènes trouvées précédemment sont $ke^{0{,}2t}$. Comme $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière, toutes les solutions s'obtiennent en lui ajoutant une solution homogène. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0{,}2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

1. On utilise la solution générale $y(t) = ke^{0{,}2t} - 15t - 75$.
2. À $t = 0$, la condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$.

En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction qui modélise la distance parcourue. On peut aussi écrire son expression en mettant 75 en facteur dans les deux termes constants.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0{,}2t} - 15t - 75 = 75(e^{0{,}2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1.a. À partir des expressions fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression fournie est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15 = 15(e^{0,2t} - 1)$. Le facteur 15 est strictement positif. Or la fonction exponentielle est croissante et $e^u \geq 1$ équivaut à $u \geq 0$. Ici, $u = 0{,}2t$, donc la condition est vérifiée pour tout t de l'intervalle $[0, 3]$. L'égalité a lieu lorsque $t = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec égalité seulement pour $t = 0$.

Question 1.b. Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].

Comme $f'(t)$ est positive sur $]0, 3]$ et nulle en 0, la fonction f est croissante sur tout l'intervalle. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$, soit environ $16{,}659$. Le tableau résume le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

t	**0**	$]0, 3[$	**3**
$f'(t)$	0	+	+
$f(t)$	0	↗	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16{,}659$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à environ $16{,}659$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. On remplace donc t par 1 dans l'expression donnée : $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cette valeur vaut environ $1{,}6052$ km. L'arrondi au dixième consiste à conserver une décimale, en examinant le chiffre suivant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(1) \approx 1{,}6$ km.

Question 3.a. La vitesse du wagon en kilomètres par minute est donnée par f'(t). Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

1. La vitesse est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute.
2. À $t = 2$, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7{,}3774$.

Arrondie au dixième, cette vitesse vaut donc $7{,}4$ kilomètres par minute. L'unité demandée dans cette question est bien le kilomètre par minute, et non le kilomètre par heure.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(2) \approx 7{,}4$ km/min.

Question 3.b. Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

La vitesse augmente puisque sa dérivée est $f''(t) = 3e^{0{,}2t} > 0$. Elle vaut 0 au départ et, à deux minutes, atteint $f'(2) = 15(e^{0{,}4} - 1) \approx 7{,}3774$ km/min. Convertie en kilomètres par heure, cette valeur est multipliée par 60. Le seuil de 400 km/h est donc dépassé à deux minutes, et a été atteint avant cet instant.

- Vitesse à deux minutes : environ $442{,}642$ km/h.
- Objectif : atteindre 400 km/h en moins de deux minutes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de 400 km/h est atteint avant deux minutes.

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. On a $f'(2) = 15(e^{0{,}4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0{,}4} - 1) - 30$. En remplaçant ces expressions puis en réduisant, le coefficient de t reste $15(e^{0{,}4} - 1)$, et le terme constant devient $45e^{0{,}4} - 75$. C'est la troisième proposition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0{,}4} - 1)t + 45e^{0{,}4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions l'aire A_1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ a pour largeur la distance de $x = 0$ à $x = 3$, soit 3 unités. Son bord inférieur est sur l'axe des abscisses et son bord supérieur est la droite $y = 2{,}25$, donc sa hauteur vaut 2,25 unités. L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur.

Dimension	Valeur
Largeur	3
Hauteur	2,25
Aire	$3 \times 2{,}25 = 6{,}75$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6{,}75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A_2 de la partie du plan délimitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

1. La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$.
2. Avec la primitive fournie, $A_2 = \frac{27}{4}\ln(3^2 + 9) - \frac{27}{4}\ln(0^2 + 9)$.
3. En utilisant la différence des logarithmes, on obtient $A_2 = \frac{27}{4}\ln(18/9) = \frac{27}{4}\ln 2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4{,}679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A et arrondir le résultat au millième.

Sur la moitié droite de la pièce, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale vaut deux fois cette différence. Ainsi, $A = 2(6{,}75 - \frac{27}{4}\ln 2) \approx 4{,}142514$. L'unité graphique étant le mètre sur chaque axe, l'aire s'exprime en mètres carrés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4{,}143\ \text{m}^2$.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse

L'exercice examine les obsolescences technique et logicielle observées sur une population de smartphones, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot de 50. Il se termine par un test bilatéral portant sur un sondage relatif à l'opinion sur la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À l'aide des informations de l'énoncé concernant les 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant obsolescence technique et obsolescence logicielle, avec les totaux.

Sur 200 smartphones, l'obsolescence technique concerne 6 appareils et l'obsolescence logicielle 16. Parmi les 16 concernés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique, soit 2 appareils. On complète les autres cases à partir des totaux de lignes et de colonnes.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184, 200.

Question 2°. En notant T l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T).

Les pourcentages de l'énoncé donnent directement les probabilités de chaque type d'obsolescence. La troisième donnée est conditionnelle : elle indique la proportion d'appareils touchés par l'obsolescence technique parmi ceux qui sont touchés par l'obsolescence logicielle.

Ainsi, la probabilité conditionnelle demandée est bien celle de T sachant L, et non celle de l'intersection T et L.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3.a. **Calculer la probabilité P(T ∩ L).**

On utilise la formule de probabilité conditionnelle : la probabilité de l'intersection est le produit de la probabilité de L par la probabilité de T sachant L. Avec les données précédentes :

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

La probabilité recherchée correspond donc à 1 % des smartphones.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∩ L) = 0,010.

Question 3.b. **Calculer la probabilité P(T ∪ L).**

Être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence correspond à l'événement $T \cup L$. On additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection, comptée deux fois dans cette somme :

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∪ L) = 0,100.

Question 3.c. **Calculer la probabilité conditionnelle P_T(L).**

On cherche ici la probabilité d'être touché par l'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique. La probabilité de l'intersection vaut 0,01 et celle de T vaut 0,03. Ainsi :

$P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)} = \dfrac{0,01}{0,03} = \dfrac{1}{3} \approx 0,333.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L)$ = 0,333.

B. Loi binomiale

Question 1°. **Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.**

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : un smartphone est non réparable avec une probabilité constante de 0,045. Le stock est assez grand pour assimiler les tirages à des tirages avec remise, donc les 50 épreuves sont indépendantes. La variable X compte les smartphones non réparables dans ces 50 épreuves : elle suit donc une loi binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question 2°. **Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.**

Tous les smartphones sont réparables lorsque le lot ne contient aucun appareil non réparable, soit lorsque $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Les 50 tirages étant indépendants, on obtient :

$P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100.$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est 0,100.

Question 3.a. **Faire tourner à la main l'algorithme qui additionne les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3, puis recopier et compléter le tableau des probabilités et des valeurs successives de S.**

Pour chaque valeur de i, on calcule la probabilité binomiale correspondante, puis on l'ajoute à S. Les probabilités et les cumuls ci-dessous sont arrondis au millième. Les cumuls successifs tiennent compte de la somme des probabilités non arrondies.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S après l'itération	0,100	0,336	0,608	0,813

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X=i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3.b. **Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.**

À la fin de la boucle, S additionne les probabilités pour i égal à 0, 1, 2 et 3. Elle représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables :

$S = P(X \leq 3) \approx 0,813.$

Autrement dit, environ 81,3 % des lots de 50 smartphones comportent au maximum trois appareils non réparables.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> S = P(X ≤ 3) = 0,813.

Question 4°. **Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.**

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est np. Avec 50 smartphones et une probabilité de non-réparabilité de 0,045 :

$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$

Sur un grand nombre de lots de 50 appareils, on prévoit donc en moyenne 2,25 smartphones non réparables par lot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. **Sous l'hypothèse nulle H_0, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule des trois propositions est exacte.**

Sous H_0, l'intervalle central de probabilité 0,95 d'une loi normale est centré sur sa moyenne. Sa demi-largeur vaut environ 1,96 fois l'écart type :

$h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$.

Arrondie au centième, cette valeur donne 0,07, qui est la proposition exacte parmi les trois choix.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Choix exact : 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 % pour tester H_0 : p = 0,55 contre H_1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0. Avec la demi-largeur arrondie au centième, $h = 0,07$, les bornes sont $0,55 - 0,07 = 0,48$ et $0,55 + 0,07 = 0,62$.

Une fréquence en dehors de cet intervalle conduit au rejet de H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conserver H_0 si 0,48 ≤ f ≤ 0,62 ; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. À partir de l'échantillon de 180 personnes, dont 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée, formuler la conclusion du test.

La fréquence observée est $\frac{76}{180} \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0. La fréquence se situe donc dans la zone de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %.

On rejette H_0 : l'échantillon ne confirme pas l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Fréquence observée : 0,422. On rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2018, code MATGRB1, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité. Deux exercices de 10 points étudient le départ d'un train à propulsion électromagnétique et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, calcul intégral, probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' - 0,2y = 0, les solutions sont y(t) = k e^(0,2t).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance ; convertir des km/min en km/h en multipliant par 60.
- Si X suit une loi binomiale B(n,p), alors E(X) = np et P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k).
- P(T ∩ L) = P(L)P_L(T) et P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le domaine de définition et établir le signe de f' avant d'énoncer les variations.
- Vérifier les unités : f' donne ici une vitesse en km/min, tandis que l'objectif est exprimé en km/h.
- Justifier le modèle binomial par le nombre d'essais, l'indépendance et la probabilité constante.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle de décision puis conclure sur H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment convertir la vitesse obtenue en kilomètres par minute en kilomètres par heure ?

La dérivée f'(t) donne la vitesse en kilomètres par minute. Pour l'exprimer en kilomètres par heure, multipliez cette valeur par 60, puis comparez-la à l'objectif de 400 km/h.

Q : Comment déterminer la loi binomiale du nombre de smartphones non réparables ?

Chaque prélèvement est assimilé à un essai indépendant, avec une probabilité constante de non-réparabilité p = 0,045. Pour 50 prélèvements, le nombre X suit donc la loi binomiale B(50, 0,045).

Q : Comment gérer le temps et les points pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Les trois parties de chaque exercice sont indépendantes : avancez sur les questions accessibles et surveillez le temps consacré aux calculs et aux arrondis.

Q : Quels arrondis et quelles exigences de présentation faut-il respecter ?

Dans l'exercice 2, les résultats sont arrondis au millième, sauf indication contraire. Dans l'exercice 1, suivez les arrondis indiqués question par question. Justifiez les calculs demandés et recopiez la réponse choisie aux QCM.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2018/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Prothésiste Dentaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.