Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux)**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2022/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1 -Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m·s⁻¹ sur un axe horizontal et ralentit sous l'action d'un système de freinage. L'exercice étudie sa vitesse par équation différentielle, analyse de fonction, calcul de distance, développement limité et équation de tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule fournie dans le sujet s'applique à une équation de la forme $y' + ay = 0$. Ici, $a = 0,8$, donc les solutions sont des fonctions exponentielles de la forme $y(t) = Ce^{-0,8t}$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout t, la fonction g vérifie bien l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de l'équation complète : $g(t) = 5$. L'ensemble des solutions s'obtient en ajoutant à cette solution particulière la solution générale de l'équation homogène associée, trouvée à la question précédente. La constante C peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,8t} + 5$. À $t = 0$, la condition initiale donne $20 = Ce^0 + 5 = C + 5$. On en déduit la constante C, puis on la remplace dans l'expression générale pour obtenir la vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît à la limite et seul le terme constant subsiste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Une courbe dont la fonction tend vers une valeur finie à l'infini admet une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote horizontale à cette hauteur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression de f'(t) fournie, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, et f est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout instant fini, le terme exponentiel est strictement positif : la vitesse reste donc supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle tend vers 5 sans jamais atteindre zéro. Le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. **Vérifier que la fonction F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée du terme exponentiel est $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. On retrouve donc exactement $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4. b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, soit $F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, on obtient $(-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'arrondi au centimètre correspond à deux chiffres après la virgule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.**

La partie régulière du développement limité fournie dans le sujet est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. La réponse attendue est celle qui ajoute au polynôme un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. L'énoncé donne $f(0) = 20$, et la dérivée fournie dans la partie B donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs, on obtient l'équation de la tangente.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Conformité et durée de vie de produits industriels

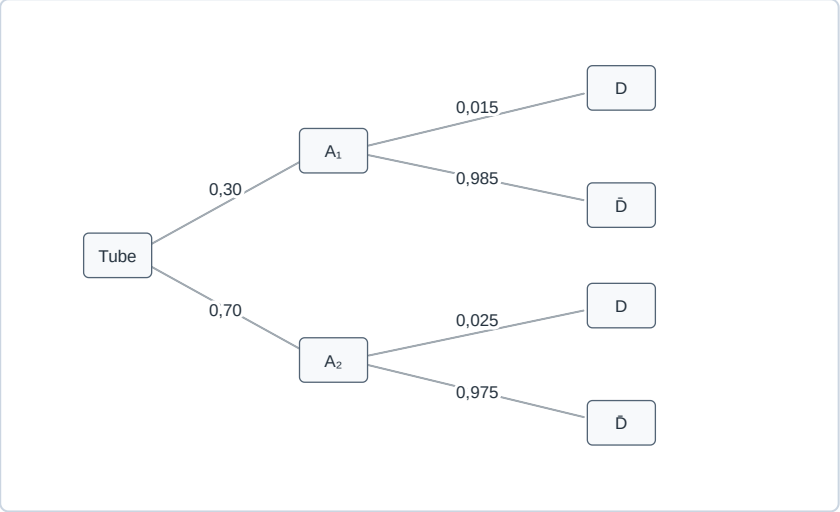
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et de défaut différentes, puis étudie leur durée de bon fonctionnement. L'exercice porte aussi sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, en distinguant l'atelier d'origine du tube et la présence ou l'absence d'un défaut.

Le premier niveau de l'arbre indique l'atelier d'origine. Le second distingue les tubes avec défaut, de probabilité conditionnelle donnée, et ceux sans défaut, de probabilité complémentaire.

Origine et conformité des tubes



D̄ signifie « sans défaut ».

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré complété ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour que les deux événements se réalisent, le tube doit provenir de l'atelier 1 et présenter un défaut. On multiplie donc la proportion issue de cet atelier par sa fréquence conditionnelle de défaut : $P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est égale à 0,022.

Les deux ateliers forment une partition de la production. La probabilité d'un défaut est donc la somme des probabilités de défaut provenant de chaque atelier :

Atelier	Contribution
1	$0,30 \times 0,015 = 0,0045$
2	$0,70 \times 0,025 = 0,0175$

Ainsi, $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un tube présente un défaut est $0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité d'origine atelier 2 parmi les tubes sans défaut. La probabilité d'obtenir un tube issu de l'atelier 2 et sans défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité totale d'absence de défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$. On divise la première probabilité par la seconde.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. Déterminer l'espérance E(T) de la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0001$, l'espérance est l'inverse du paramètre : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. Cette durée représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé dans le stock.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La durée moyenne de bon fonctionnement est de 10 000 heures.

Question 2. **Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la durée est une variable continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Ainsi, $1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$, puis on arrondit au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité recherchée est $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. **Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser une durée donnée est le complément de la probabilité de l'atteindre ou de la dépasser : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$, on obtient $e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$, soit le résultat arrondi au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 975 rivets conformes observés parmi les 1 000 rivets prélevés, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Avec 975 rivets conformes sur 1 000, on obtient $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence sert d'estimation de la proportion inconnue dans toute la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0{,}975$, soit une estimation de 97,5 %.

Question 2. **Déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %, et arrondir les bornes au millième.**

Avec la fréquence observée $f = 0{,}975$ et l'effectif $n = 1\,000$, l'intervalle donné dans l'énoncé est $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$.

Borne	Valeur arrondie au millième
Inférieure	0,965
Supérieure	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux, où il est 3. Les exercices étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de productions industrielles, en mobilisant équations différentielles, fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; ajouter une solution particulière permet de résoudre l'équation avec second membre.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-lt}$.
- L'estimation ponctuelle d'une proportion est la fréquence observée ; l'intervalle à 95 % utilise $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans une équation différentielle, vérifier le signe du coefficient et appliquer la condition initiale après avoir déterminé la solution générale.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, examiner si la vitesse atteint zéro, et ne pas confondre une limite positive avec une vitesse nulle.
- Dans un arbre pondéré, multiplier les probabilités le long d'une branche et additionner les branches correspondant à l'événement recherché.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser $f = 975/1\,000$, $n = 1\,000$ et arrondir les bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$. Ajoutez ensuite une solution particulière constante de l'équation avec second membre, puis utilisez $f(0) = 20$ pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité d'une origine sachant que le tube est sans défaut ?

Divisez la probabilité que le tube provienne de l'atelier 2 et soit sans défaut par la probabilité qu'il soit sans défaut. Cette dernière est le complément de la probabilité d'un défaut.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices indépendants notés chacun sur 10 points. Avancez sur les questions accessibles, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Quels arrondis le sujet demande-t-il ?

La distance du chariot est arrondie au centimètre, les probabilités de durée de vie au centième et les bornes de l'intervalle de confiance au millième. Gardez les valeurs exactes pendant les calculs.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2022/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste Dentaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.