Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROTHÉSISTE DENTAIRE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la vitesse et freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2022/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2 -Sujet.pdf

1. Modélisation de la vitesse et freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. L'étude porte sur l'équation différentielle, les variations et la distance parcourue, puis sur le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule fournie s'applique à l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. Les solutions sont donc de la forme $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. Cette expression vérifie bien l'équation, car la dérivée de $e^{-0,8t}$ est $-0,8e^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'équation est vérifiée pour tout t de l'intervalle : g est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de l'équation différentielle.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle complète s'obtient en ajoutant à cette solution toutes les solutions de l'équation homogène associée. D'après la question précédente, celles-ci sont $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient donc la solution générale sur $[0 ; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est égale à 5.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative C admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$. L'ordonnée de cette droite est la valeur de la limite. Ainsi, l'équation de l'asymptote est $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à C en $+\infty$ a pour équation $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 15 + 5 = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse tend vers 5 m/s lorsque le temps tend vers l'infini. En outre, pour tout instant fini, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. Le modèle ne prévoit ainsi aucun instant où la vitesse s'annule : le chariot ne s'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 m/s et tend vers 5 m/s.

Question 4.a. **Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Comme $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1, puis donner son arrondi au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1 seconde. Avec la primitive F, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$. Après réduction, la valeur exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Son arrondi au centimètre est obtenu en évaluant cette expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir la proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché par le logiciel est $20 - 12t + 24/5\ t^2$. Or $24/5 = 4,8$. La proposition exacte est donc celle qui conserve les termes $20 - 12t + 4,8t^2$ et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^{0} = -12$. La tangente passe donc par le point $(0 ; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une équation de la tangente est $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

Un système électrique reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). À l'aide des transformées de Laplace, il faut déterminer le signal de sortie, en étudier une expression par intervalles et représenter les signaux demandés.

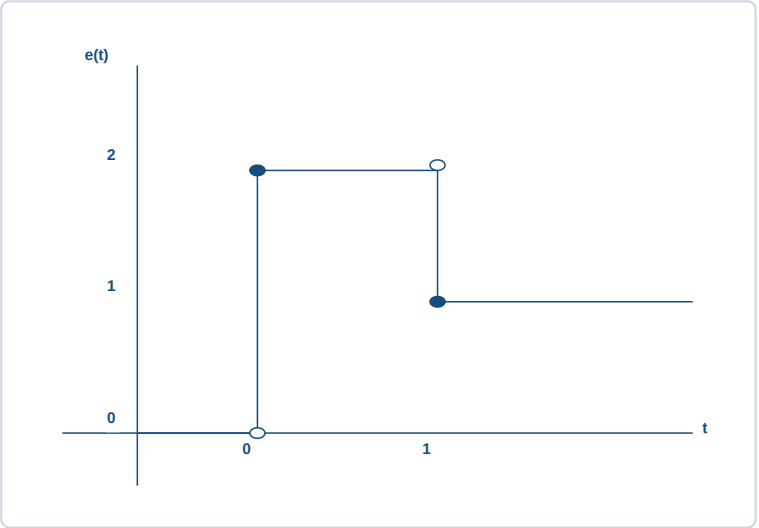
Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il est nul avant l'instant zéro. À partir de zéro, le premier échelon vaut 2, puis la soustraction de l'échelon retardé d'une unité ramène le signal à 1 à partir de t = 1. Les valeurs aux instants de saut sont déterminées par la convention U(0) = 1 :

- en t = 0, le point de hauteur 2 est fermé ;
- en t = 1, le point de hauteur 1 est fermé.

Courbe du signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de Laplace de l'échelon unité est $1/p$. Pour un échelon retardé d'une unité, le formulaire donne la transformée e^{-p}/p. En utilisant la linéarité sur $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, on obtient :

$$E(p) = 2\mathcal{L}\{U(t)\} - \mathcal{L}\{U(t-1)\}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par l'expression obtenue à la question précédente, puis on distribue le facteur $1/(p+1)$:

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu est la différence entre $p+1$ et p, donc il vaut 1. Le dénominateur commun est $p(p+1)$:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses s'obtiennent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : une fonction $g(t)$ devient $g(t-1)U(t-1)$. On obtient, dans l'ordre demandé :

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

À partir de la décomposition précédente, on écrit $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Sur l'intervalle $[0;1[$, le facteur de retard annule les deux termes qui le contiennent. Il reste donc l'inverse de $2/p - 2/(p+1)$:

$$s(t) = 2U(t) - 2e^{-t}U(t).$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

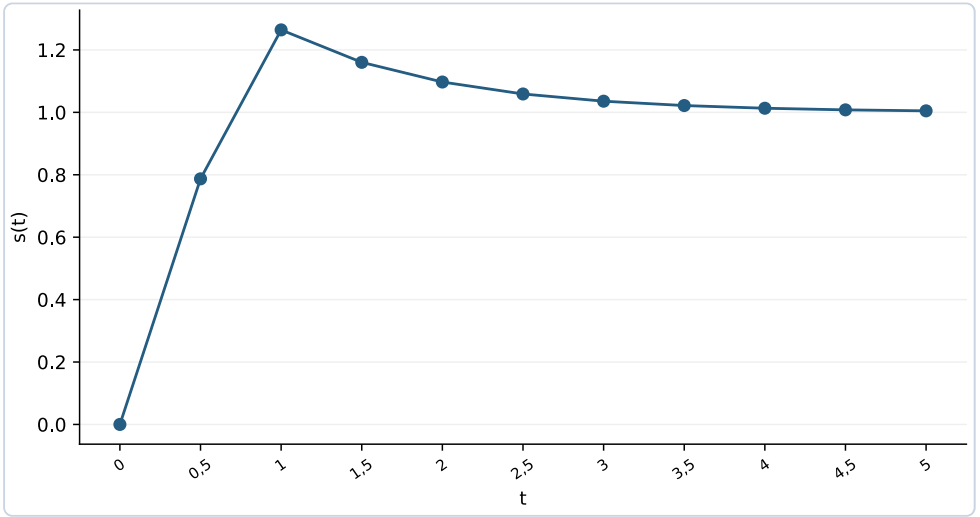
On utilise l'expression donnée pour $t \geq 1$ et on y remplace t par 1. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie l'expression exacte avant d'en calculer l'approximation décimale. Cette valeur est ensuite arrondie au dixième, comme demandé :

$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}2642.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis, pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, soit $2 - 2/e$. La courbe part de l'origine, atteint environ 1,3 à cet instant, puis décroît vers la droite horizontale $s = 1$.



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe par $(0;0)$ et $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on dispose de $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel e^{-t} tend vers zéro. Le produit $(e-2)e^{-t}$ tend donc également vers zéro, et la limite de $s(t)$ est le terme constant restant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot par équation différentielle, variations et intégrale, puis la réponse d'un système électrique par transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b avec b constant, on ajoute une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = F(t1) - F(t0), si F est une primitive.
- Un retard de a unités dans le temps introduit le facteur e^(-ap) dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Justifier le sens de variation avec le signe de f' sur l'intervalle étudié.
- Pour la distance, évaluer la primitive dans l'ordre F(1) - F(0), puis arrondir au centimètre.
- Respecter les intervalles [0 ; 1[et [1 ; +∞[pour l'expression et le tracé du signal de sortie.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction vitesse ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle demandé. Si F est une primitive de f, la distance entre t0 et t1 vaut F(t1) - F(t0). On conserve la valeur exacte avant de l'arrondir à la précision exigée.

Q : Comment traiter le terme retardé dans la transformée de Laplace ?

La transformée de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap). Pour un retard d'une unité, on multiplie donc la transformée par e^(-p), comme dans l'expression de S(p) de cet exercice.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comprend deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux, gardez quelques minutes pour les tracés sur le document-réponse et vérifiez les unités, les bornes d'intégration et les arrondis.

Q : Quelles précautions prendre pour les tracés et les réponses numériques ?

Sur les tracés, respectez les axes, les graduations et les valeurs ou comportements limites utiles. Pour les calculs numériques, conservez d'abord la forme exacte, puis arrondissez uniquement au rang demandé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2022/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste Dentaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.