Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROTHÉSISTE DENTAIRE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Développement en série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2023/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2 -Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), exprimée en centimètres, entre le fond du tiroir et celui du meuble est étudiée pendant la fermeture. L’exercice mobilise une équation différentielle, l’étude d’une fonction exponentielle, un algorithme de seuil et le calcul d’une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l’un de ses facteurs est nul.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

1. Les deux racines sont réelles et distinctes : -1 et -4.
2. La solution générale est donc une combinaison des exponentielles associées.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, où M se trouve à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).

À l’instant initial, la distance OM est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. Sa vitesse de variation est la dérivée de la distance : la vitesse donnée vaut -10 cm·s^{-1}.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

À deux secondes, on remplace t par 2 dans l’expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Numériquement, cette distance vaut environ 3,16 cm.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3,16$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer qu'il est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction est continue et $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm, donc $f(4) < 0,5$ cm.

- À l'instant initial, $f(0) = 20 > 0,5$.
- La distance passe sous 0,5 cm avant 4 s.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. Sachant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les deux termes exponentiels e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Leur combinaison linéaire tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

Une courbe dont l'ordonnée tend vers 0 lorsque l'abscisse tend vers $+\infty$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en appliquant la règle de dérivation de l'exponentielle composée : $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 0.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 0$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes au besoin jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième et le résultat du test f(t) > 0,5.**

Le test reste vrai tant que $f(t) > 0,5$. Le tableau suit les incréments de 0,1 s de l'algorithme ; les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième.

Ligne	t **(s)**	$f(t)$ **(cm)**	**Test**
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le test devient faux à la ligne 39, pour $t = 3,9$ s.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

1. L'algorithme s'arrête au premier test faux, à $t = 3,9$ s.
2. À cet instant, $f(t) \approx 0,47$ cm, donc la distance est inférieure au seuil de 0,5 cm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$.

En évaluant aux bornes : $m = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

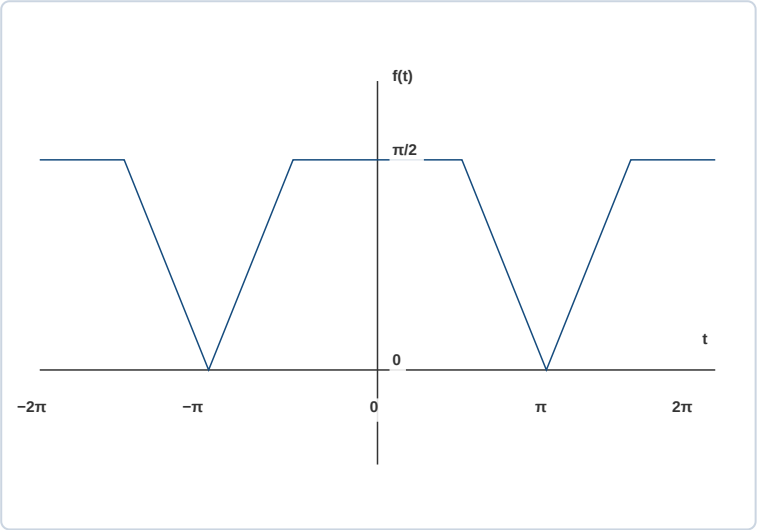
2. Développement en série de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et son développement en série de Fourier. Les tâches portent sur son graphique, ses coefficients, une somme partielle et l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux et de sa périodicité.

Sur [0 ; π], le graphe est constant à π/2 jusqu'à π/2, puis décroît linéairement jusqu'à 0 en π. La parité donne le tracé symétrique à gauche de 0 et la période 2π répète ce motif. Sur [−2π ; 2π], les minima sont donc en −π et π, et les plateaux de hauteur π/2 se trouvent aux extrémités et autour de 0.

Graphe de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe périodique pair : plateaux à π/2 et minima nuls en −π et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

D'après la formule du formulaire, pour une période T = 2π, on a $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$, en utilisant la périodicité pour centrer l'intégrale. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire ; leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique [−π ; π] est nulle. Cela vaut pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. On note ω la pulsation associée à la fonction f. Déterminer ω.

Le formulaire relie la pulsation à la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La fonction étudiée est périodique de période $T = 2\pi$. On remplace donc T par 2π : $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de t. Ici, comme la variable t est celle de la fonction périodique, la valeur recherchée est bien 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 vaut 3π/8.

Le coefficient moyen est $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Par périodicité, l'intégrale sur une période vaut celle sur [−π ; π]. Comme f est paire, elle vaut deux fois l'intégrale de 0 à π. On sépare les deux expressions de f : $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, T = 2π et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On coupe l'intégrale en π/2, où la définition de f change. En remplaçant f par ses deux expressions, on obtient $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. On admet que $a_n = 2/(\pi n^2) \times (\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$. Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On substitue successivement n = 1, 2 et 3 dans la formule fournie. Les valeurs des cosinus sont respectivement $(0, -1)$, $(-1, 1)$ et $(0, -1)$. Le calcul donne :

n	a_n
1	$\frac{2}{\pi}$
2	$-\frac{1}{\pi}$
3	$\frac{2}{9\pi}$

Les signes résultent directement de la différence $\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n étant nuls, il ne reste que les termes en cosinus. En remplaçant a_0, a_1, a_2 et a_3 par les valeurs établies précédemment, on obtient l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La représentation de s_3 est une fonction lisse, périodique et paire. Elle présente des creux en −π et π, ainsi qu'un maximum autour de 0. La courbe 1 est faite de segments et la courbe 2 est une sinusoïde ; aucune ne correspond à cette somme de trois termes cosinus. La courbe qui présente les creux et les plateaux arrondis attendus est la numéro 3.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. On note $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On utilise les coefficients précédents dans $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Ainsi, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'évaluation numérique, arrondie à quatre décimales, donne la valeur demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

La valeur de référence est $F^2 = \pi^2/6$, et l'approximation calculée est $P \approx 1{,}6437$. Leur écart relatif vaut $\frac{|P-F^2|}{F^2} \times 100$, soit environ 0,074 %. Parmi les trois choix proposés, cet écart correspond à 0,1 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, durée 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction exponentielle, puis le développement de Fourier d'une fonction périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, f y est décroissante ; une limite finie en $+\infty$ donne une asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- La somme partielle s_n additionne le terme constant et les n premières harmoniques de la série de Fourier.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer f(0), qui représente une distance, de f'(0), qui représente une vitesse, et conserver les unités.
- Dans l'algorithme, augmenter t de 0,1 et arrêter dès que le test $f(t) > 0,5$ devient faux.
- Pour Fourier, identifier la période T et la pulsation ω avant d'utiliser les formules des coefficients.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2, et non à F.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent la solution générale sous forme d'exponentielles. Les conditions initiales donnent les constantes, en utilisant f(0) pour la distance et f'(0) pour la vitesse.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est impair et son intégrale sur une période symétrique est nulle. Les coefficients sinus disparaissent donc du développement, qui conserve le terme constant et les cosinus.

Q : Comment suivre l'algorithme de fermeture sans se tromper ?

On initialise t à 0 et on augmente sa valeur de 0,1 tant que f(t) reste supérieure à 0,5. Il faut vérifier le test après chaque mise à jour. La valeur finale de t permet d'interpréter le moment où le tiroir atteint le seuil demandé.

Q : Quelles formules de Fourier appliquer à une fonction paire ?

La pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$. Pour $n \geq 1$, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$. Le coefficient constant se calcule avec $a_0 = (1/T)\int_0^{T} f(t)dt$.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspd.fr/assets/annales/bts-pd/E2 - Mathématiques/2023/BTS PD - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste Dentaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.